ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

(1) අරය a වූ වෘත්තයක පර්යන්ත අරයන්ගෙන් 2θ කෝණයක් වැහෙන වෘත්ත කොටසක කේන්ද්‍රකය කේන්ද්‍රයේ සිට 2a සයින් θ / 3θ දුරකින් බව පෙන්වන්න. අරය a වූ වෘත්ත පාදකයක හැඩය ගත් ඒකාකාර ආස්තරයක් OA හා OB අරයන්ගෙන් පර්යන්ත වේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය r වූ OPQ වෘත්ත පාදකයක් ආස්තරයෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. ආස්තරය සිරස් තලයක PA දාරය තිරස් පොළොවේ ස්පර්ශ වන ලෙස නිසලව පිහිටයි. එය ආස්තරයේ සිරස් තලයෙහි ඇද වැටෙන අවස්ථාවේ පිහිටයි නම්,

$r = \frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt{9\pi^2+24\pi-48}}{3\pi-4} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න. (1975)

(2) a දිගින් ද w බරින්ද යුත් සිහින් ඒකාකාර කම්බියක් ABC අර්ධවෘත්තාකාර තැටියක (ACB අර්ධ වෘත්ත චාපයෙන් ද AB විෂ්කම්භයෙන් ද සමන්විත) පරිමිතිය සෑදෙන සේ නමා ඇත. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට නැමී කම්බියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ඇති දුර $2a/(2+\pi)^2$ බව පෙන්වන්න. නැමී කම්බියේ A ලක්ෂ්‍යය අචල ආධාරකයකට සුමට ලෙස කුරු ලා ඇත. කම්බිය නිශ්චලතාවයෙන් එල්ලෙයි. AB විෂ්කම්භය සිරසත් සමඟ $\tan\theta = 2/(2+\pi)$ වන පරිදි θ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. AB සිරස් ලෙස ද A ට පහළින් සිටින සේ කම්බිය නිශ්චලතාවෙහි පවත්වා ගැනීම සඳහා දැන් B හිදී තිරස් බලයක් යොදනු ලැබුවොත් මේ බලයේ විශාලත්වයත් A හි දී කුර මත යෙදෙන බලයේ විශාලත්වය හා දිශාවත් ගණනය කරන්න. (1980)

(3) r අරය ඇති ඒකාකාර අර්ධවෘත්ත ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $4r/3\pi$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. උස h ද ආධාරකයේ අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්ත කේතුවක් එහි අක්ෂය හරහා යන තලයක් ඔස්සේ බාග කැබලි දෙකකට කපනු ලැබේ. මින් එක් බාග කැබැල්ලක් එහි ආධාරකය හරි අඩක් වන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයෙන් නිදැල්ලේ එල්ලනු ලැබේ. එහි ආධාරකය තිරස සමඟ $\tan^{-1}(4a/\pi h)$ කෝණය සාදන බව පෙන්වන්න. (1980)

(4) ඒකාකාර තුනී අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. W බරැති තුනී අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන සේ නිශ්චලතාවෙහි පවතී. පාත්‍රයේ ගැටිය මත ලක්ෂ්‍යයක දී W බරැති අංශුවක් ඇඳා තිබේ. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී ගැටියේ තලයෙහි තිරසට ආනතිය සොයන්න. පාත්‍රය ඒකාකාරයි. (1981)

(5) කේන්ද්‍රයේ දී $2\theta\ (<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයක ආකාරයට නැමූ ඒකාකාර කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. එකම ඒකාකාර කම්බියෙන් කපාගත් එකක් අර්ධවෘත්තයක් ද අනෙක කේන්ද්‍රයේදී $2\theta\ (<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකක් ද වශයෙන් ඇති කැබලි දෙකක් ළසඳේ හැඩයක් සෑදෙන සේ තබා තිබේ. ළසඳේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටා ඇත්තේ එහි ඇතුළු චාපය මත නම්, θ කෝණය, $2\sin\theta\,(1+\sin\theta) = 2\theta + \pi\sin\theta\,(1-\cos\theta)$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. (1981)

(6) ABC ඒකාකාර කම්බි කැබැල්ලක් AB වෘත්ත පාදකයක හා එහි BC, CA පර්යන්ත අර දෙකක් ආකාරයට තිබෙයි. මේ කම්බි කැබැල්ලේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ABC කම්බි කැබැල්ල A ගෙන් නිදැල්ලේ එල්ලෙයි නම්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී CA සිරස සමඟ $\tan^{-1}\{3/(\pi+1)\}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. (1981)

(7) a අරය ඇති වෘත්තයක කේන්ද්‍රක ඛණ්ඩයක හැඩය ඇති ඒකාකාර ආස්තරයක් OA, OB අරවලින් මායිම් වී තිබෙයි. $A\hat{O}B = 2\theta$ නම්, ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $(2a/3\theta)$ සයින් θ දුරකින් පිහිටා ඇති බව පෙන්වන්න. OA මත C ද OB මත D ද පිහිටන OCD කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් OAB ආස්තරයෙන් ඉවත් කරගනු ලැබෙයි. එහි ඉතිරි CADB කොටස CA සෘජු දාරය තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ සිරස් තලයක නිශ්චලතාවෙහි පවතියි. $OC \leq \frac{a}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4\sin 2\theta}{3\theta-\sin 2\theta}}-1\right\}$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(8) ඒකාකාර තුනී අර්ධ ගෝලීය කබොලක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ඍජුකෝණික ඒකාකාර කුඤ්ඤයක් එක් මුහුණත් සිරස් වන සේ රළු තිරස් තලයක් මත නිශ්චලතාවෙහි තබා තිබෙයි. අරය a වූ ඒකාකාර තුනී බිත්ති සහිත අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය කුඤ්ඤයේ සිරස් මුහුණතට හේත්තු වන සේ ද පාත්‍රයේ ගැටිය ඒ මුහුණතට සමාන්තර සිරස් තලයක පිහිටන සේ ද නිශ්චලතාවෙහි තබනු ලැබෙයි. පාත්‍රයේ බර කුඤ්ඤයේ බරට සමාන නම්ද පාත්‍රයත් කුඤ්ඤයත් අතර ස්පර්ශය සුමට නම්ද කුඤ්ඤය ඇද නොවැටීමට නම් කුඤ්ඤයේ තිරස් මුහුණතක් කොතරම් පළල් විය යුතු දැයි සොයන්න. (1983)

(9) ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටුම සොයන්න. ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සිරස් බිත්තියක් හා තිරස් පොළවක් ස්පර්ශ කරන පරිදි බිත්තිය හා පොළව අතර කෝණයේ නිසලව පවතී. බිත්තියෙහි සහ පොළොවෙහි රළු බව සමාන නම් අර්ධ ගෝලයේ තල ආධාරකයෙහි තිරසට ආනතිය $\sin^{-1}\{8\mu(1+\mu)/3(1+\mu^2)\}$ අගය නොඉක්මවන බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු එක් එක් ස්පර්ශකයේ දී ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. (1984)

(10) h උසින් යුතු ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයෙහි සිට h/4 උසින් වන බව අනුකලනයෙන් දක්වන්න. තල ආධාරකයක් සහිත කේතු කබොලක බාහිර පෘෂ්ඨයත් අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයත් පොදු අක්ෂයෙකින් යුතු ඍජු වෘත්තාකාර කේතු වේ. බාහිර පෘෂ්ඨයේ උසත් ආධාරකයෙහි අරයත් පිළිවෙලින් 117 cm ද 30 cm ද වෙයි. අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය සඳහා ඒවා පිළිවෙලින් 39 cm ද 10 cm ද වෙයි. O යනු කබොලේ බාහිර පෘෂ්ඨයේ ආධාරකයෙහි AB විෂ්කම්භයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර කබොලේ A ලක්ෂ්‍යයට ද ඈඳීමෙන් කේතුව අවලම්බනය කොට ඇත. එය සමතුලිතතාවෙන් එල්ලී පවතින විට AB තිරස සමඟ 45^0 ක කෝණයක් ඇති කරන බව දක්වන්න. (1985)

(11) a අරයන් යුතු ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රය වන O සිට 3a/8 දුරකින් පිහිටන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න. මෙම අර්ධ ගෝලය තන්තු දෙකක් මගින් P නම් ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇත. එම තන්තු එකක් O ලක්ෂ්‍යයටත් අනෙක තල මුහුණතේ ගැටියේ පිහිටි Q ලක්ෂ්‍යයකටත් ගැට ගසා ඇත. PO =PQ = $5\sqrt{2}a/2$ යන්න දී ඇත්නම් OQ තිරස සමඟ $\tan^{-1}$ (4/3 I) කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. (1986)

(12) O කේන්ද්‍රයෙන් ද α කෝණයකින් හා r අරයෙන්ද යුත් වෘත්තයක AOB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ආකාරයෙන් වූ කඩදාසි කැබැල්ලක OA දාරය OB දාරයත් සමඟ සම්පාත වන සේ ගෙන ඒමෙන් ඍජු වෘත්තාකාර කේතු කබොලක් තනා තිබෙයි. O සිට කබොලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{2}{3}\mathbf{r}\cos\theta$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\sin\theta = \frac{\alpha}{2\pi}$ වේ. කබොලේ ස්කන්ධයට සමාන ස්කන්ධයක් ඇති වෘත්තාකාර කඩදාසි කැබැල්ලක් අලවා ඉහත සඳහන් කේතු කබොලේ පතුල වසා තිබෙයි. සංවෘත කබොලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{5}{6}\mathbf{r}\cos\theta$ දුරකින් පිහිටන බව සාධනය කරන්න. (1987)

(13) a අරයන් යුතු ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. a අරයෙන් l දිගින් හා අර්ධගෝලයෙහි ඝනත්වය ම සහිත ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක තල මුහුණත්වලින් එකක් අර්ධගෝලයෙහි වෘත්තාකාර ආධාරකයට දෘඪ ලෙස ඇඳා ඇත්තේ සංයුත වස්තුවක් සෑදෙන ආකාරයටය. තල කෙළවරේ සිට සංයුත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. වස්තුවට එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් මෙසයක් සමග ස්පර්ශ වෙමින් ඕනෑම පිහිටීමක නිසලව තිබෙන්නට හැකි වෙයි. $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න. (1988)

(14) $y^2 = 4ax$ සහ $x = a$ ප්‍රස්තාර මඟින් සපර්යන්ත පෙදෙස x අක්ෂය වටා පරිභ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඒකාකාර ඝනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ හි පිහිටන බව පෙන්වන්න. බර 9w වන එවැනි ඝනයක් බර 4w සහ අරය 2a වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ ඝනයේ තල මුහුණත අර්ධගෝලයේ තල මුහුණත සමග සම්පාත වන අයුරිනි. අර්ධ ගෝලයේ වක්‍රාකාර පෘෂ්ඨය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන ලෙස තබා ඇත. ඝනයට සමතුලිතව නිසලතාවේ පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න. (1989)

(15) අරය r වන ඒකාකර ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ඒකාකර ඝනකයක එක් මුහුණතක් ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ආධාරකයට ඇඳා ඇත්තේ ඝනකයෙහි මෙම මුහුණතේ විකර්ණ අර්ධ ගෝලයෙහි ආධාරකයේ විෂ්කම්භය ලෙස පිහිටන අන්දමටය. අර්ධගෝලය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ_1 ද ඝනකය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝන්තවය ρ_2 ද වෙයි නම්, සංයුක්ත වස්තුවට අර්ධගෝලයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලය සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතව පිහිටිය හැක්කේ $\pi\rho_1 = 8\rho_2$ විට බව පෙන්වන්න. (1990)

(16) ආධාරකයේ අරය r ද අඩ සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4} r \cot\alpha$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ජින්නකයක වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa $(\lambda > 1)$ උස h ද වෙයි. කුඩාතම ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ජින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{h}{4}\left(\frac{3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\right)$ බව පෙන්වන්න. කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ජින්නකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබෙයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී අක්ෂය සිරසට $\alpha (< \frac{\pi}{2})$ කෝණයකින් ආනත වෙයි. $\tan\alpha$ සොයන්න. (1991)

(17) අරය a ද O කේන්ද්‍රයේදී රේඩියන් 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද ACB ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මධ්‍ය අරය මත පිහිටන බවත් $OG = a\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ බවත් පෙන්වන්න. එකම ඒකාකාර කම්බියෙන් ලබාගත් එහෙත් වෙනස් අර සහිත වෘත්තාකාර කැබලි දෙකක් අතුරෙන් එකකින් S_1 අර්ධ වෘත්තයක් ද අනෙකින් කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් $2\theta\ (< \pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කෙරෙන S_2 වෘත්ත චාපයක් ද එකට තබා ඇත්තේ ළසඳක් (crescent) සෑදෙන පරිදිය. θ කෝණය කෙසේ ද යත් ළසඳෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය S_2 ඇතුළු චාපය මත පිහිටන පරිදි වෙයි නම්, $\sin^2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta + \frac{\pi}{4}\sin 2\theta = \theta$ සාධනය කරන්න. (1992)

(18) අරය a වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලක් එහි කේන්ද්‍රය වූ O ට $a\cos\alpha$ දුරකින් $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ වූ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදනු ලැබේ. වඩා විශාල කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. කබොළේ වඩා විශාල කොටස එම ද්‍රව්‍යයෙන්ම සෑදි අරය $a\sin\alpha$ වූ තැටියකින් වසනු ලැබේ. එසේ සෑදුනු සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a(1-\cos\alpha)^2}{3-\cos\alpha}$ දුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1993)

(19) i) අරය a ද, පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ ද, වූ ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය කබොලකත්,

ii) උස h ද අඩ – සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය $k\sigma$ ද, වූ ඒකාකාර කුහර කේතුවකින් ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ සොයන්න.

$a = h\tan\alpha$ බවත් පෘෂ්ඨ දෙක පොදු වෘත්තයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වෘත්ත දාර දිගේ එකට මූට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබෙයි. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{36+k^2}-k}{6}$ නම්, අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සංයුක්ත වස්තුවට සමතුලිතතාවේ පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න. (1994)

(20) අරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය කබොලක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ a අරයෙන් යුත් ඝන ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් එහි සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. සංවෘත බඳුනක් සිහින් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොලකින් හා එම සිහින් ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයෙන්ම තැනූ තල වෘත්ත ආධාරකයකින් සමන්විත වෙයි. මේ එක් එක් කොටසේ අරය a ට සමානය. බඳුන සම්පූර්ණයෙන්ම ජලයෙන් පුරවා දාරයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයෙකින් එල්ලූ විට එහි ආධාරකය යටි අත් සිරසට θ කෝණයකින් ආනතව සමතුලිතතාවේ පවතියි. කබොළ තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය කුමක් වුවත් $\frac{1}{3}<\tan\theta<\frac{3}{8}$ බව පෙන්වන්න. බඳුනේ බරේත් ජලයේ බරේත් අනුපාතය θ ඇසුරෙන් සොයන්න. (1995)

(21) i) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්ත කේතුවක,

ii) උස a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඝනත්වය ρ ද, ආධාරක අරය a ද, උස 4a වූ ද, ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්ත කේතුවක් සහ ඝනත්වය $\lambda\rho$ ද, ආධාරක අරය a ද, වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක් ඒවායේ ආධාරක සම්පාත වන පරිදි එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක ආකාරයේ කෙළි බඩුවක් තනා තිබෙයි. පොදු ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කෙළි බඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් කෙළි බඩුව ස්ථායි සමතුලිතතාවේ පැවතිය නොහැකි නම් $\lambda > 20$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(22) h උසැති ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය r ද උස h ද වන ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හැරීමෙන් අරය r ද උස $\frac{h}{2}$ ද වන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙළවරක් සමඟ සම්පාත වන පරිදි ය. ඉතිරිවන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23}{40}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. හාරන ලද සිලින්ඩරය එහි ආධාරකය තිරස් තලයක් මත පිහිටන සේ තබනු ලැබේ. මෙම තලය ක්‍රමයෙන් උඩු අතට ඇල කෙරෙන විට ලිස්සා යාම වැලැක්වීමට ප්‍රමාණවත් පරිදි තලය රළු නම්, හාරන ලද සිලින්ඩරය ඇද වැටීම සඳහා තිරස සමඟ තලයට තිබිය යුතු අඩු ම ආනතිය සොයන්න. (1997)

(23) අරය 2r වූ කුහර ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක් ආධාරකයේ C කේන්ද්‍රයේ සිට $\sqrt{3}$ දුරකදී එහි අක්‍ෂයට ලම්බ තලයක් මඟින් කොටස් දෙකකට බෙදා තිබෙයි. වෘත්ත දාර දෙකක් සහිත R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය C හි සිට $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය r ද උස h ද වූ ඒකාකාර කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක එක් කෙළවරක් වසා තිබෙන අතර අනෙක් කෙළවරට K කොටසේ r අරය සහිත වෘත්ත දාරය මැලියම් යොදා අලවා බඳුනක් සාදා තිබෙයි. අර්ධ ගෝලය සහ සිලින්ඩරය එකම පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ඇති ද්‍රව්‍යයකින් තනා ඇතැයි උපකල්පනය කර බඳුනේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සිලින්ඩරයේ සංවෘත ආධාරකයේ සිට $\frac{h^2+6r^2+4\sqrt{3}rh}{2h+r+4\sqrt{3}\,r}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1998)

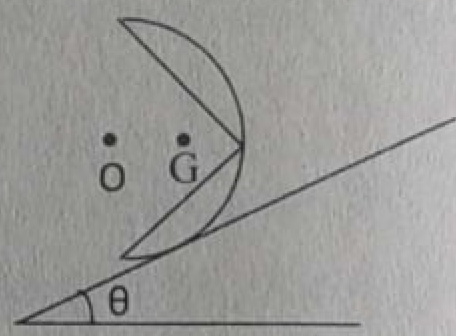
(24) ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වේ. එහි සෘජු දාරය AOB වන අතර සමමිතික අක්ෂය OC වෙයි. පිළිවෙලින් OB සහ OC දිගේ Ox සහ Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ ගනු ලැබේ. මෙම අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(0,\frac{4a}{3\pi}\right)$ බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. ආස්තරය මත අරය r (< a) වූ අර්ධ වෘත්තයක් අඳිනු ලැබේ. එම අර්ධ වෘත්තයේ P කේන්ද්‍රය පිහිටන්නේ AO මත A සිට r දුරකින් ය. මෙම අර්ධ වෘත්තයෙන් ඇතුළත වර්ගඵලය සහිත කොටස කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉහත Oxy අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන්ම ආස්තරයෙන් ඉතිරි වන R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි $(\bar{x},\bar{y})$ ඛණ්ඩාංක දෙනු ලබන්නේ $\bar{x}=\frac{r^2}{a+r}, \bar{y}=\frac{4(a^2+ar+r^2)}{3\pi(a+r)}$ මඟින් බව පෙන්වන්න. මෙම R කොටස A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇත්නම් සමතුලිත පිහිටීමේ දී AOB දාරයෙහි සිරසට ආනතිය r කෙරෙන් ස්වායත්ත වන බව පෙන්වා මෙම නියත ආනතිය සොයන්න. (1999)

(25) තල ආධාරකයේ අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එම ආධාරකයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත්තේ අරයන් a වූ සම්පාත තල ආධාරක එකට පෑස්සූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින් සහ අඩ සිරස් කෝණය α වූ සෘජු වෘත්ත කේතුවකිනි. මෙම වස්තුව අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයෙහි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් මේසයක් මත ස්පර්ශ කරමින් සමතුලිතතාවේ තිබිය හැකි නම් α හි අගය සොයන්න. (2000)

(26) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත, ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3h}{4}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

එවැනි කේතුවක අඩ – සිරස් කෝණය 15° වන අතර, එහි ආධාරකය රළු තිරස් ගෙබිමක ඇතිව නිශ්චලව තිබේ. එහි ශීර්ෂයට සම්බන්ධිත සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් කේතුව ඇළ කරනු ලැබේ. කේතුවේ අක්ෂය අඩංගු සිරස් තලයක, තිරස සමග 45° කෝණයක් සාදමින් තන්තුව පහළට ඇදී තිබෙයි. කේතුවේ දාරය ගෙබිම මත යම්තම් ලිස්සා යන්නේ, ගෙබිම සහ දාරයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයට සිරස්ව ඉහළින් ශීර්ෂය පිහිටන විටදී ය. තන්තුවේ T ආතතිය, අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සහ ඝර්ෂණ බලය සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. (2001)

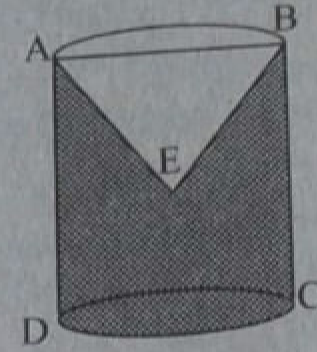
(27) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8a}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් උස a ද ආධාරකයේ අරය a ද වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කිරීමෙන් ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත. අර්ධගෝලයේත් කේතුවේත් තල ආධාරක සම්පාත වන අතර දෙකෙහිම පොදු කේන්ද්‍රය O වේ. උස h වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් ඉහත විස්තර කරනු ලැබූ ඝන වස්තුවේ G ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර සොයන්න.



තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් සමඟ ඉහත කී ඝන වස්තුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතතාවේ පිහිටන අවස්ථාවේ දී එම වස්තුවේ සිරස් හරස් කඩක් රූපයෙන් දක් වේ. තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාවක් සමඟ එකම සිරස් තලයක O සහ G පිහිටයි. OG තිරස් යැයි දී ඇත්නම් $\theta = 30^0$ බව පෙන්වන්න. w යනු අර්ධ ගෝලයේ බර නම්, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝර්ෂණ බලයත් අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවත් w ඇසුරෙන් ලබාගන්න. ඝන වස්තුවත් තලයත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයට තිබිය හැකි අඩුතම අගය ද සොයන්න. (2002)

(28) ABC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථයන් හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටන බව පෙන්වන්න. A, B හා C හි පිහිටි සමාන ස්කන්ධ සහිත අංශු තුනක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමඟ G සමපාත වන බවද පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණාකාර ඒකාකාර ආස්තරයක C කෝණය මහා කෝණයක් වේ. එම ආස්තරය AC පාදය තිරස් මේසයක ගැටෙමින් සිරස් තලයක පවතී. ආස්තරය නොපෙරළෙන පරිදි B ශීර්ෂයෙන් එල්ලිය හැකි විශාලතම බර $\frac{1}{3}W\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි W යනු ආස්තරයේ බර වන අතර a, b, c සුපුරුදු අර්ථ ගනී. (2003)

(29) උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් එහි අක්ෂය මත වන බව පෙන්වන්න.

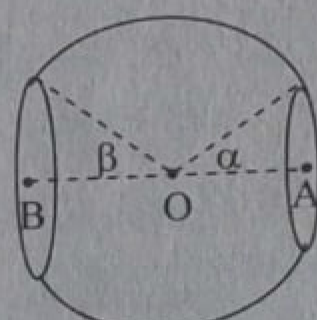


රූප සටහනෙන් උස H හා ආධාරක අරය R වූ ABCD ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් උස h හා ආධාරක අරය R වූ ඍජු වෘත්තාකාර EAB කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් පසුව ඉතුරු කොටස දක්වෙයි. එසේ හැරීමෙන් ලැබෙන S වස්තුවෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න.

එනයින් S හි ගුරුත්වය කේන්ද්‍රය E හි ඇත්නම් එවිට $h=(2-\sqrt{2})H$ බව පෙන්වන්න.

S වස්තුව තිරස සමග $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන රළු තලයක් මත DC ආධාරකය තලය මත වන පරිදි තබා ඇත. S ලිස්සීමෙන් වැලැක්වීමට තරම් තලය රළු වෙයි. S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් $R\tan\alpha > (\sqrt{2}-1)H$ නම් S ඇද නොවැටෙන බව පෙන්වන්න. (2004)

(30) රූපයෙහි දක්වෙන අයුරින් අරය a , කේන්ද්‍රය O හා පෘෂ්ඨ ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලකින් O සිට (O හි දෙපැත්තේ) $a\cos\alpha, a\cos\beta$ දුරින් වූ සමාන්තර තල දෙකකින් කලාපයක් කපා වෙන් කෙරෙයි. මෙහි $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ වෙයි.

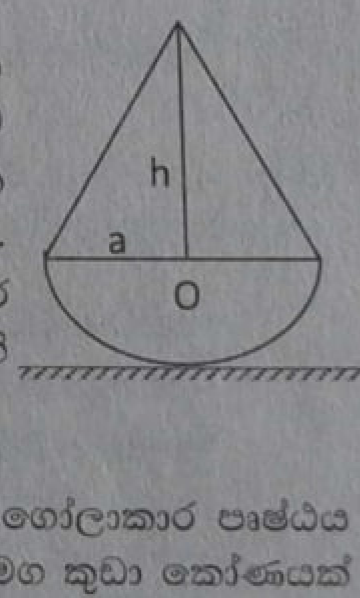


අනුකලනයෙන්,

i) කලාපයේ ස්කන්ධය $2\pi a^2\sigma(\cos\alpha+\cos\beta)$ බව,

ii) කලාපයේ ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත එහි A, B දෙකෙළවර අතර හරි මැද පිහිටන බව පෙන්වන්න. මින් A කෙළවර O සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වෙයි. σ පෘෂ්ඨ ඝනත්වයම සහිත අරය $a\sin\beta$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් සිය කේන්ද්‍රය B හි පිහිටන පරිදි කලාපයේ වඩා විශාල වෘත්තාකාර දාරයට සවිකරනු ලැබෙයි. $\sin\alpha=\sin\beta\sqrt{1-\cos\beta}$ වෙතොත් සංයුක්ත වස්තුවට ගෝලාකාර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂයක් තිරස් ගෙබිමක් මත ඇති අයුරින් සමතුලිතතාවේ නිසලව පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න. (2005)

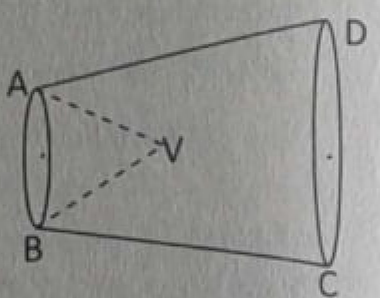
(31) රූපයේ දක්වෙන වස්තුව කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් සහ පොදු ආධාරකයෙහි දී දෘඪ ලෙස බද්ධ කරන ලද ආධාරකයේ අරය a සහ උස h වූ එම ඝනත්වයම සහිත ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් සමන්විත වෙයි. කේතුවේ සහ අර්ධ ගෝලයේ සක්න්ධ කේන්ද්‍රවලට O සිට ඇති දුර අනුකලනය මඟින් සොයන්න. ඒ නයින්, සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{|h^2-3a^2|}{4(h+2a)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



සංයුක්ත වස්තුව ස්වකීය සමමිතික අක්ෂය සිරස් වන පරිදි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. එය සමමිතික අක්ෂය සිරස සමග කුඩා කෝණයක් සාදන පරිදි මෙම සමතුලිත පිහිටීමෙන් යමතම විස්ථාපනය කරනු ලැබේ. $h>\sqrt{3}a$ වෙයි නම් ඇද වැටෙන බව පෙන්වන්න. i) $h<\sqrt{3}a$, ii) $h=\sqrt{3}a$ නම් කුමක් සිදුවෙයි ද? (2006)

(32) ශීර්ෂය O අඩ සිරස් කෝණය α සහ උස h වූ ආධාරකය රහිත කුහර කේතුවක් ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් සාදා ඇත. එහි ස්කන්ධය $\pi\sigma h^2\sec\alpha\tan\alpha$ බව පෙන්වා එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. එම වර්ගයේ ම ලෝහ තහඩුවකින් සෑදි කේන්ද්‍රය B සහ අරය $h\tan\alpha$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් ඉහත කේතුවේ ආධාරකය ලෙස දෘඪ් සවිකරනු ලැබේ. සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\frac{h\left(\frac{2}{3}\sec\alpha+\tan\alpha\right)}{\sec\alpha+\tan\alpha}$ බව පෙන්වන්න. සංයුක්ත වස්තුව ආධාරකයේ දාරයෙහි පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලනු ලැබේ. AO සහ AB යටිඅත් සිරස සමග සමාන කෝණ සාදයි නම්, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න. (2007)

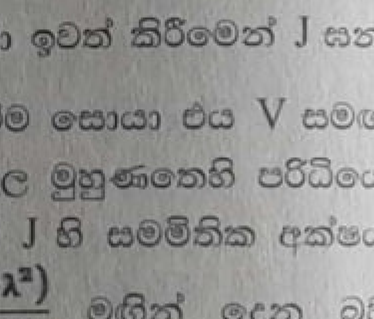
(33) පහත රූපයෙහි ABCD මගින් නිරූපණය වන්නේ සෘජු වෘත්ත කේතුවක උස h වූ ඡින්නකයක ආකාරයේ ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන වස්තුවකි. එහි වෘත්තාකාර තල මුහුණත්වල විෂ්කම්භ $AB = 2\lambda a$ සහ $CD = 2a$ වේ. මෙහි λ පරාමිතයක් සහ $0<\lambda<1$ වෙයි.



එහි ස්කන්ධ $\frac{1}{3}\rho\pi a^2h(1+\lambda+\lambda^2)$ බවත් එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G කුඩා මුහුණතෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h(3+2\lambda+\lambda^2)}{4(1+\lambda+\lambda^2)}$ දුරකින් පිහිටන බවත් අනුකලනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

ආධාරකයේ අරය a සහ උස h වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්ත ඝන කේතුවක ස්කන්ධය සහ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අපෝහනය කරන්න. ABCD ඡින්නකයෙන් ආධාරකයේ අරය λa සහ උස $\frac{h}{2}$ වූ VAB සෘජු වෘත්ත ඝන කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් J ඝන වස්තුව ලැබෙයි. J වස්තුවෙහි G_1 ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයා එය V සමග සමපාත විය නොහැකි බව පෙන්වන්න. J වස්තුව වඩා විශාල මුහුණතෙහි පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේ දී J හි සමමිතික අක්ෂය සිරස සමග සාදන β සුළු කෝණය $\tan\beta=\frac{8a(2+2\lambda+\lambda^2)}{h(4+8\lambda+5\lambda^2)}$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න. (2008)

(34) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි අක්ෂය මත ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

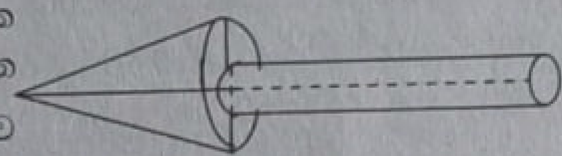


ආධාරකයේ අරය r සහ උස h වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් සඳහා අච්චුවක් අරය $R(>r)$ හා උස $H(>h)$ වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර කොටයක් තුළ කේතු කුහරයක් තැනීමෙන් නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ සමමිතික අක්ෂය සිලින්ඩරාකාර කොටයේ සමමිතික අක්ෂය සමග සමපාත වේ. තනාගන්නා ලද අච්චුව රූපයේ පෙන්වා ඇති අයුරින් වේ. PQ විෂ්කම්භයේ සිට අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න. $R = 2r$ හා අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතු කුහරයේ ශීර්ෂයේ පිහිටයි නම්, $h = 2(4-\sqrt{14})H$

බව අපෝහනය කරන්න. R = 2r වන සේ වූ අච්චුව P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තබා ඇති අතර එය නිදහස් ලෙස සමතුලිතතාවේ එල්ලෙමින් ඇත. තව ද, H = 3r නම්, යටිඅත් සිරස සමඟ PQ හි ආනතිය සොයන්න. (2010)

(35) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලාකාර කවචයක අභ්‍යන්තර හා බාහිර අරයන් a හා b (> a) වේ. කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය දිගේ එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ බව පෙන්වන්න. ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු පොළොවක් හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් ස්පර්ශ වන පරිදි මෙම අර්ධගෝලාකාර කවචය සමතුලිතතාවේ පවතී. සමතුලිතතාව සීමාකාරී නම්, තිරසට ආධාරකයේ ආනතිය $\sin^{-1}\left\{\frac{8\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{3(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}\right\}$ පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු කවචය හා රළු පෘෂ්ඨ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. (2011)

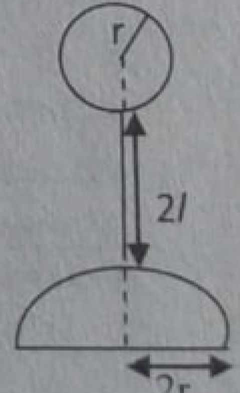
(36) උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි එකට සවිකර ඇති ආධාරකයේ අරය 3r හා උස h වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් හා අරය r හා උස 2h වන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් ඒකාකාර ඝන සංයුක්ත වස්තුවක් සමන්විත වෙයි. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{5}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. එක් කෙළවරක් සිවිලිමකට හා අනෙක් කෙළවර කේතුවේ වෘත්තාකාර පතුලේ පරිධියෙහි A නම් ලක්ෂ්‍යයකට සවිකොට ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් සංයුක්ත වස්තුව සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් තිබෙයි. සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය යටිඅත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්, $\tan\alpha = \frac{12r}{h}$ බව පෙන්වන්න.



කේතුවේ ශීර්ෂයේ දී සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය දිගේ P නම් බලයක් යෙදීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය තිරස් වන ආකාරයට සංයුක්ත වස්තුව සමතුලිතතාවේ තැබෙයි. P බලය හා තන්තුවේ ආතතිය W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න. මෙහි W යනු සංයුක්ත වස්තුවේ බර වෙයි. (2012)

(37) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

එකම ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදි ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන ගෝලයක් දිග $2l$ සහ ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවරට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අර්ධ ගෝලයේ සමමිතික අක්ෂය දණ්ඩ හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය එකම සරල රේඛාවක් මත පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. ගෝලයේ අරය r ද ස්කන්ධය m ද වන අතර අර්ධ ගෝලයේ අරය 2r වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{6}(8r+3l)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙම සංයුක්ත වස්තුව තිරසට θ

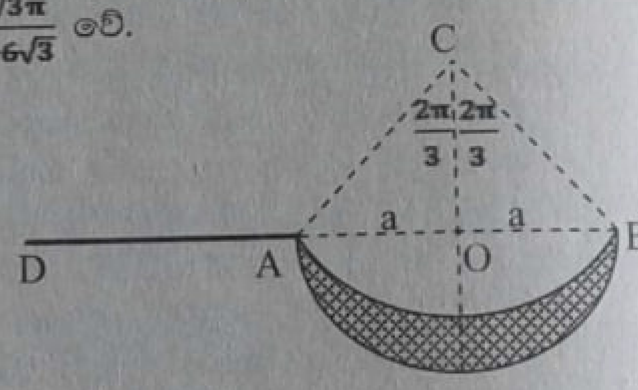


කෝණයකින් ආනත අවල තලයක් මත අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකය තලය මත ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් තලය රළු යැයි උපකල්පනය කරමින් $\tan\theta < \frac{12r}{8r+l}$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරෙළෙන බව පෙන්වන්න. $l = \frac{4r}{3}$ හා $\theta = \frac{\pi}{6}$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරෙළෙන බව පෙන්වා සංයුක්ත වස්තුව මත ආනත තලය මගින් යොදන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න. (2013)

(38) කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්ත ඛණ්ඩයකට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ළසඳ හැඩ ඒකාකාර ආස්තරයක්, රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි, කේන්ද්‍රයO සහ අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයකින් සහ ස්වකීය C කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{2\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකින් පර්යන්තගත වේ. මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, C සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = \frac{3\sqrt{3}\pi}{\pi+6\sqrt{3}}$ වේ.

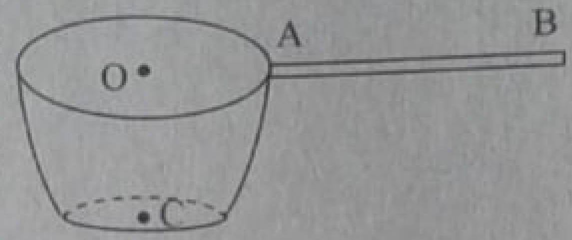


ආස්තරයේ ස්කන්ධය M යැයි ගනිමු. දිග 2a සහ ස්කන්ධය m වන AD සිහින් ඒකාකාර සෘජු දණ්ඩක්, දික් කරන ලද BA රේඛාව දිගේ පිහිටන පරිදි A කෙළවරේ දී දෘඪ ලෙස ළසඳට සවිකර, රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි දැකැත්තක් සාදා ඇත. ආස්තරයේ තලය සිරස්ව, අර්ධ වෘත්තය සහ දණ්ඩේ නිදහස් D කෙළවර, ගෙබිම ස්පර්ශ කරන පරිදි, දැකැත්ත තිරස් ගෙබිමක තබා ඇත. මෙම පිහිටීමේ එය සමතුලිතව පවතී නම්, $M(\sqrt{3}k-1) < 4\sqrt{6}m$ බව පෙන්වන්න. (2009)

(39) අරය a හා පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධ ගෝලීය කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටියෙහි තලයට සමාන්තරවූ ද, O කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින්වූ ද, තලයක් කැපූ විට ලැබෙන ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න. මෙහි C යනු කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියෙහි කේන්ද්‍රය වේ.

එම σ පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ම සහිත අරය $a\sin\alpha$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක දාරය ඉහත ඡින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියට දෘඪ ලෙස සවි කර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, OC මත O සිට $\left[\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right] a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

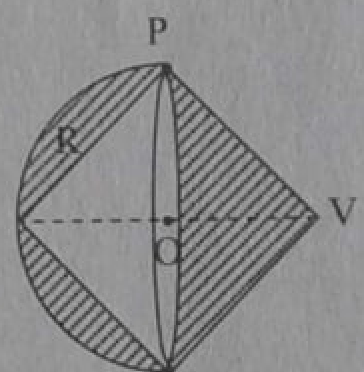
$\alpha = \frac{\pi}{3}$ යැයි ද භාජනයෙහි බර W යැයි ද ගනිමු. දිග b හා බර $\frac{W}{4}$ වූ සිහින් ඒකාකාර AB දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන පරිදි රූපයේ දැක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර



සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. සාස්පාන, මිටෙහි B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර, මිට යටි අත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left[\frac{1}{7}\right]$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b = 4a$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(40) ආධාරකයේ අරය a හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන කේතුවක හා අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවල පිහිටුම්, **අනුකලනය** භාවිතයෙන් සොයන්න. ස්කන්ධය M, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින්, ආධාරකයේ අරය a හා උස a වූ C නම් ඍජු වෘත්ත කේතුව ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුව R යැයි ගනිමු. M ඇසුරෙන් R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධය, හා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඊළඟට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට S සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදෙන පරිදි C ඝන කේතුව R ඝන වස්තුවට සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. මෙහිදී C හි ආධාරකයේ වෘත්තාකාර දාරය R හි ගැටියට දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කරනු ලබන්නේ ගැටියේ O කේන්ද්‍රය C හි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය සමග සමපාත වන පරිදි ය.



S සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, එහි සමමිතික අක්ෂය u, ආධාරකවල පොදු කේන්ද්‍රය වන O සිට $\frac{a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

a) S සංයුක්ත වස්තුව. දාරයේ P ලක්ෂ්‍යකින් නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ.

   i) සමමිතික අක්ෂය වන OV හි තිරසට ආනතිය සොයන්න; මෙහි V යනු C හි ශීර්ෂයයි.

   ii) සමමිතික අක්ෂය තිරස් ලෙස තබා ගැනීම සඳහා V ශීර්ෂයට ඇඳිය යුතු අංශුවේ m ස්කන්ධය, M ඇසුරෙන් සොයන්න.

b) V හිදී සම්බන්ධ කරන ලද m ස්කන්ධය ද සහිත S සංයුක්ත වස්තුව, එල්ලන ලද ලක්ෂ්‍යයෙන් ඉවත් කර, එහි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨීය අවල සුමට තිරස් තලයක ඇතිව සමතුලිතව තබනු ලැබේ. OV අක්ෂය හා උඩු අත් සිරස අතර කෝණයේ අගය පරාසය සොයන්න. (2015)